6. Множества. Примеры.

Определение. *Множество M из линейного пространства $\mathbb{L}$ называется* **выпуклым**, *если для любых двух точек u и v из этого множества и любого $\alpha \in [0,1]$ точка $\alpha u + (1-\alpha)v$ также лежит в множестве M.*

Определение. *Множество M из нормированного пространства $\mathbb{X}$ называется* **ограниченным**, *если существует такое положительное число R, что $||x||_{\mathbb{X}} \leqslant R \ \forall x \in M$.*

Определение. *Множество M из метрического пространства $\mathbb{M}$ называется* **замкнутым**, *если оно содержит все свои предельные точки, т.е. для любой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов множества M,* **сильно** *сходящейся к некоторому элементу u, выполнено $u \in M$.*

Определение. *Множество M из евклидового пространства $\mathbb{E}$ называется* **слабо замкнутым**, *если оно содержит все свои* **слабые** *предельные точки, т.е. для любой последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов множества M,* **слабо** *сходящейся к некоторому элементу u, выполнено $u \in M$.*

Замечание. *Из слабой замкнутости множества вытекает сильная, обратное неверно: единичная сфера в* бесконечномерном *евклидовом пространстве замкнута, но не слабо замкнута.*

Теорема. *В гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ из выпуклости и замкнутости множества вытекает его слабая замкнутость.*

Определение. *Множество H из евклидового пространства $\mathbb{H}$ называется* **слабо компактным**, *если из любой последовательности $\{h_n\}_{n=1}^{+\infty}$ его элементов можно выделить подпоследовательность,* **слабо** *сходящуюся к некоторому его элементу h.*

$\Uparrow$
H

·) $\forall$ замкн. подмн-во компакта $\mapsto$ компакт

··) $\forall$ слабо замкн. подмн-во слабого компакта $\mapsto$ слабый компакт по Т. 1 (стр. 183, К-Ф) любая слабо сх-ся посл-ть ограничена

если $\|u_k-u_0\|_H \to 0$, то $\|u_k\| = \|u_0+u_k-u_0\| \leq \underbrace{\|u_0\|}_{const} + \underbrace{\|u_k-u_0\|}_{\to 0}$ — огр. от прот.

берём в качестве $\forall$-й посл-ти $\forall$-ю сходящуюся по норме

Замечания. *1. В* конечномерном *евклидовом пространстве компактность множества эквивалентна его замнутости и ограниченности, в* бесконечномерном *евклидовом пространстве это не так*, однако из компактности вытекает и замкнутость, и огр-ть.

2. Из компактности множества вытекает его слабая компактность, обратное неверно: единичный шар в бесконечномерном евклидовом пространстве *слабо компактен, но не компактен.* берём в кач. $\forall$-й посл-ти $\forall$-ю слабо сх-ся

3. Из слабой компактности вытекает слабая замкнутость и огр-ть. от прот.

Теорема. *В гильбертовом пространстве* $\mathbb{H}$ *из выпуклости, ограниченности и замкнутости множества вытекает его слабая компактность.*

Примеры выпуклых множеств: $\forall h_1, h_2 \in S_R(0)$ $\|\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2\|_H \leq \lambda \underbrace{\|h_1\|_H}_{\leq R} + (1-\lambda)\underbrace{\|h_2\|_H}_{\leq R} \leq R$ ч.т.д.

+1 Шар: $S_R^{(0)} = \{h \in \mathbb{H} \mid ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant R\}$, $R > 0$.

д.з. +2 Невырожденный эллипсоид: $H = \{h \in \mathbb{H} \mid ||Ah - f||_{\mathbb{F}} \leqslant R\}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{F})$, $\exists A^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbb{F} \to \mathbb{H})$ (лишнее), $f \in \mathbb{F}$, $R > 0$. $\|A(\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2) - f\|_F = \|\lambda(Ah_1 - f) + (1-\lambda)(Ah_2 - f)\|_F \leq \lambda \underbrace{\|Ah_1 - f\|_F}_{\leq R} + (1-\lambda)\underbrace{\|Ah_2 - f\|_F}_{\leq R} \leq R$ ч.т.д.

очевидно +3 Гиперплоскость: $H = \{h \in \mathbb{H} \mid \langle c, h\rangle_{\mathbb{H}} = R\}$, $c \in \mathbb{H}$, $c \neq \Theta_{\mathbb{H}}$.

+4 Полупространство: $H = \{h \in \mathbb{H} \mid \langle c, h\rangle_{\mathbb{H}} \leqslant R\}$, $c \in \mathbb{H}$, $c \neq \Theta_{\mathbb{H}}$.

Примеры невыпуклых множеств:

+1 Сфера: $S = \{h \in \mathbb{H} \mid ||h||_{\mathbb{H}} = R\}$, $R > 0$. $\forall h \in S$ $\exists -h \in S \mapsto \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}(-h) = \Theta_H \notin S$ ч.т.д.

д.з. +2 Кольцо: $H = \{h \in \mathbb{H} \mid R_1 \leqslant ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant R_2\}$, $0 < R_1 < R_2$.

Примеры ограниченных множеств:

+ очевидно 0. Шар + сфера

+1. Невырожденный эллипсоид в ~~гильбертовом~~ нормированном пространстве: $\forall h \in H$ $\|h\|_H = \|A^{-1}(Ah)\|_H = \|A^{-1}(Ah - f + f)\|_H \leq \|A^{-1}(Ah - f)\|_H + \underbrace{\|A^{-1}f\|_H}_{const}$, $\|A^{-1}(Ah-f)\|_H \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ah - f\|_F \leq R$

д.з. $H = \{h \in \mathbb{H} \mid ||Ah - f||_{\mathbb{F}} \leqslant R\}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{F})$ (норм.), $\exists A^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbb{F} \to \mathbb{H})$, $f \in \mathbb{F}$, $R > 0$.

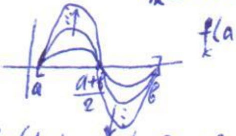
д.з. +2 $X = \{x \in \ell^2 \mid \sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx_k^2 \leqslant 1\}$. $\|x\|_{\ell_2}^2 = \sum\limits_{k=1} x_k^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx_k^2 \leq 1 \mapsto \forall x \in X$ $\|x\|_{\ell_2} \leq 1$ ч.т.д. $\{= 1$ для $\bar{x} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)\}$

$\forall u \in U$ $\|u\|^2_{L_n^2(a,b)} = \int_a^b \underbrace{\|u(s)\|^2_{\mathbb{R}^n}}_{\leq K^2} ds \leq (b-a)K^2$ +3. $U = \{u \in L_n^2(a, b) \mid u(t) \in V \subset \mathbb{R}^n\}$, V — ограниченное множество из $\mathbb{R}^n$. $\forall v \in V$ $\|v\|_{\mathbb{R}^n} \leq K$

Примеры неограниченных множеств:

гипер. $\Pi = \{f \in L^2(a,b) : \langle f, 1\rangle = 0\} \subset F$

+1 $F = \{f(\cdot) \in L^2(a, b) \mid \left|\int\limits_a^b f(t)\, dt\right| \leqslant 1\}$. $f_k(t) = k\sin\left(\frac{t-a}{b-a}2\pi\right)$, $f_k \in F$, $f_k(a+t) = -f_k(b-t)$, $\int_a^b f_k(t)dt = 0$, $\|f_k\|^2_{L^2} = \frac{k^2(b-a)}{2} \to +\infty$



+3,4 гипер. Π и п/пр-во Π

д.з. +2 $Z = \{z \in \ell^2 \mid |z_k| \leqslant 1,\ k = 1, 2, \ldots\}$. $z^p = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p}, 0, \ldots, 0, \ldots) \in Z$, $\|z^p\|_{\ell_2} = \sqrt{p} \to +\infty$

Примеры замкнутых множеств: для $\forall \{h_n\} \in S$, $\|h_n - h\|_H \to 0$ $\left|\|h_n\|_H - \|h\|_H\right| \leq \|h_n - h\|_H \to 0 \mapsto \|h\|_H = R$ ч.т.д.

+0. Шар

д.з. +1 Сфера в бесконечномерном пространстве: $S = \{h \in \mathbb{H} \mid ||h||_{\mathbb{H}} = R\}$, $R > 0$.

см. Доп. 10 +2. $U = \{u \in L_n^2(a, b) \mid u(t) \in V \subset \mathbb{R}^n\}$, V — замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$.

д.з. +3. Невырожденный эллипсоид: $H = \{h \in H : \|Ah - f\|_F \leq R\}$ пусть $\|h_n - h\|_H \to 0$ $\left|\|Ah - f\|_F - \|Ah_n - f\|_F\right| \leq \|(Ah - f) - (Ah_n - f)\|_F \leq \underbrace{\|A\|}_{const} \cdot \underbrace{\|h_n - h\|_H}_{\to 0}$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \|Ah_n - f\|_F = \|Ah - f\|_F$

Примеры незамкнутых множеств:

д.з. +1 Открытый шар в бесконечномерном пространстве: $H = \{h \in \mathbb{H} \mid ||h||_{\mathbb{H}} < R\}$, $R > 0$.

для $\forall h \in H$, $\|h\| \neq 0 \mapsto$ рассм. $h_k = \lambda_k \cdot h \in H$, где $\lambda_k \in [1; \frac{R}{\|h\|})$, $\lambda_k \to \frac{R}{\|h\|} - 0$ $\mapsto \|h_k\| = \underbrace{\lambda_k \|h\|}_{<R} \to R - 0$

?2. $U = \{u(\cdot) \in L^2(0, 1) \mid |u(0)| \leqslant 1\}$.

$\|h_k - \frac{R}{\|h\|}h\| = |\lambda_k - \frac{R}{\|h\|}| \|h\| \to 0$ т.е. $\{h_k\} \xrightarrow{сх.} \frac{R}{\|h\|}h \notin H$

Примеры слабо замкнутых множеств:

+1 Шар в бесконечномерном (гильбертовом) пространстве: $S_R^{(0)} = \{h \in \mathbb{H} \mid ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant R\}$, $R > 0$.

по Th из вып-ти и замкн-ти $\mapsto$ слаб. замкн.

$S_R(0)$ — замкнут! для $\forall \{h_n\} \in S_R(0)$ $\|h_n - h\|_H \to 0$ $\left|\underbrace{\|h_n\|_H}_{\leq R} - \|h\|_H\right| \leq \|h_n - h\|_H \to 0$ $\exists \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \|h_n\|_H}_{\leq R} = \|h\|_H$ ч.т.д.

или так: $\|h\| \leq \underbrace{\|h_n\|}_{\leq R} + \underbrace{\|h - h_n\|}_{\to 0}$, $n \to +\infty \mapsto \|h\| \leq R$

— Доп. 10 —

В Задаче ОУ:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u) \\ x(t_0) \in M_0 \quad x(t_1) \in M_1, \quad t_0 = 0,\ t_1 = T \\ u(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} U \text{ — вып., замкн., огр.} \\ J(u) = \int_{t_0=0}^{t_1=T} f_0(t, x, u)\,dt + \Phi(x(t_1)) \longrightarrow \inf_{U} \end{cases}$$

{т.е. непустой вып. компакт}

$$\mathcal{Y}_U = \{ u(t) \in L^2_m[0,T] : u(t) \overset{\text{п.в.}}{\in} U \subset R^m \}$$

$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ $\quad$ $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$

$T > 0$ фиксир.

Утверждение: класс допустимых управлений $\mathcal{Y}_U$ слабо компактен в $L^2_m[0,T]$

Обоснование: $\boxed{L^2_m[0,T] \text{ — гильбертово}}$ (см. оборот)

$\mathcal{Y}_U$ — выпукло ⊕ (т.к. U-выпукло):

для $\forall$ фикс. $u, v \in \mathcal{Y}_U$ для п.в. $t \in [0,T]$ {кроме тех t, где $u(t) \notin U$, $v(t) \notin U$, коих мера нуль}

фикс. $\forall$ такое t:

$\lambda u + (1-\lambda) v \in \mathcal{Y}_U \Leftarrow \lambda \underbrace{u(t)}_{\in U} + (1-\lambda) \underbrace{v(t)}_{\in U} \in U$

$\mathcal{Y}_U$ — ограничено ⊕ (т.к. U-ограничено):

для $\forall u \in \mathcal{Y}_U$ $\|u\|^2_{L^2_m[0,T]} = \int_0^T \underbrace{\|u(s)\|^2_{R^m}}_{\overset{\text{п.в.}}{\leq} |U|^2} ds \leq T|U|^2$

для п.в. $s \in [0,T]$

$u(s) \in U \Rightarrow \|u(s)\|_{R^m} \leq \max\limits_{v \in U} \|v\|_{R^m} \overset{\text{по опр. назов.}}{=} |U|$.

$\mathcal{Y}_U$ — замкнуто ⊕ (т.к. U-замкнуто):

Рассм. $\forall \{u_n\} \in \mathcal{Y}_U \xrightarrow{L^2_m[0,T]} u_0$, т.е. $\int_0^T \underbrace{\|u_n(s) - u_0(s)\|^2_{R^m}}_{\overset{\forall i=\overline{1,m}}{\geq} (u^i_n(s) - u^i_0(s))^2} ds \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \{u^i_n\} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2[0,T]} u^i_0$, $i = \overline{1,m}$

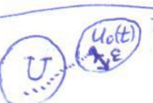
$\Rightarrow$ для $\{u_n\}$ $\exists$ п/п $\{u_{n_{k_1}}\}$, для которой $\{u^1_{n_{k_1}}\} \xrightarrow{\text{п.в.}} u^1_0$ (см. оборот); из $\{u_{n_{k_1}}\}$ выделим п/п $\{u_{n_{k_2}}\}$, для которой $\{u^2_{n_{k_2}}\} \xrightarrow{\text{п.в.}} u^2_0$ {при этом $\{u^1_{n_{k_2}}\} \xrightarrow{\text{п.в.}} u^1_0$}

$\Rightarrow$ и т.д. до m-й координаты, получим п/п $\{u_{n_{k_m}}\}$, для которой $\{u^i_{n_{k_m}}\} \xrightarrow{\text{п.в.}} u^i_0$ $\forall i = \overline{1,m}$.

$\Rightarrow$ для п.в. $t \in [0,T]$, фикс. $\forall$ такое t

$\|\underbrace{u_{n_{k_m}}(t)}_{\overset{\text{п.в.}}{\in} U\text{-замк.}} - u_0(t)\|_{R^m} \xrightarrow[k_m \to +\infty]{} 0 \Rightarrow u_0(t) \in U$

{от противного: если $u_0(t) \notin U$, то $U \cap S_\varepsilon(u_0(t)) = \emptyset \Rightarrow u_{n_{k_m}}(t) \notin U$}



т.е. $u_0 \in \mathcal{Y}_U$

Рассм. $\langle u, v\rangle_{L^2_m(a,b)} = \int_a^b \langle u(s), v(s)\rangle_{R^m} ds$: $\left\{u \in L^2_m(a,b) : u(t) = \begin{pmatrix} u^1(t) \\ \cdots \\ u^m(t)\end{pmatrix}, \ u^i \in L^2(a,b)\right\}$

— Доп 10.1 —

$\langle u(s), v(s)\rangle = \underbrace{u^1(s)v^1(s)}_{\text{инт.}} + \ldots + \underbrace{u^m(s)v^m(s)}_{\text{инт.}}$ — инт., т.к. $|ab| \le \frac{a^2+b^2}{2}$

① $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ очевидно

② $\langle u, u\rangle = \int_a^b \underbrace{\|u(s)\|^2_{R^m}}_{\geq 0} ds \geq 0 \quad \forall u \in L^2_m(a,b)$

$= 0 \iff \|u(s)\|_{R^m} \overset{п.в.}{=} 0 \iff u(s) \overset{п.в.}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0\end{pmatrix} \iff u^i(s) \overset{п.в.}{=} 0, \ i=\overline{1,m} \iff u = \theta_{L^2_m(a,b)}$

③ $\langle u, v+w\rangle = \int_a^b \langle u(s), v(s)+w(s)\rangle_{R^m} ds = \underbrace{\int_a^b \langle u(s), v(s)\rangle_{R^m} ds}_{\langle u, v\rangle} + \underbrace{\int_a^b \langle u(s), w(s)\rangle_{R^m} ds}_{\langle u, w\rangle}$

④ $\langle u, \lambda v\rangle = \int_a^b \langle u(s), \lambda v(s)\rangle_{R^m} ds = \lambda\langle u, v\rangle$

итого ↑ это скал. пр-ем, порожд. норму $\|u\|_{L^2_m(a,b)} = \left(\int_a^b \|u(s)\|^2_{R^m} ds\right)^{1/2}$

Пусть $\{u_n\}$ — фунд. в $L^2_m(a,b)$, $\{u_n\} \subset L^2_m(a,b)$ $\implies \rho^2_{L^2_m}(u_n, u_k) \xrightarrow[n,k\to+\infty]{} 0 \iff \|u_n - u_k\|^2_{L^2_m(a,b)} \xrightarrow[n,k\to+\infty]{} 0 \iff$

$\iff \int_a^b \underbrace{\|u_n(s) - u_k(s)\|^2_{R^m}}_{\sum (u_n^i(s) - u_k^i(s))^2} ds \xrightarrow[n,k\to+\infty]{} 0 \iff \forall i=\overline{1,m} \ \underbrace{\int_a^b (u_n^i(s) - u_k^i(s))^2 ds}_{\rho^2_{L^2}(u_n^i, u_k^i)} \xrightarrow[n,k\to+\infty]{} 0$

$\sum_{i=1}^m \int_a^b (u_n^i(s) - u_k^i(s))^2 ds$

т.е. $\{u_n^i\}$ фунд. в $L^2(a,b)$ $\forall i=\overline{1,m}$

L^2-полно

$\exists u_0^i \in L^2(a,b)$: $\{u_n^i\} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} u_0^i$, $i=\overline{1,m}$

т.е. $\int_a^b (u_n^i(s) - u_0^i(s))^2 ds \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $i=\overline{1,m}$

$\exists u_0(t) = \begin{pmatrix} u_0^1(t) \\ \cdots \\ u_0^m(t)\end{pmatrix} \in L^2_m(a,b)$:

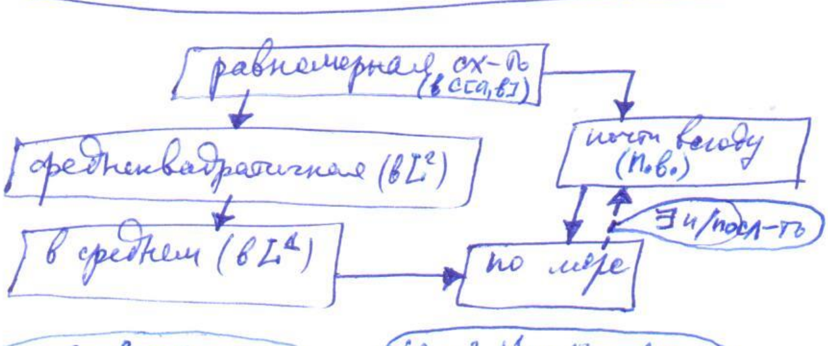
$\rho^2_{L^2_m(a,b)}(u_n, u_0) = \int_a^b \underbrace{\|u_n(s) - u_0(s)\|^2_{R^m}}_{\sum_{i=1}^m (u_n^i(s) - u_0^i(s))^2} ds = \sum_{i=1}^m \underbrace{\int_a^b (u_n^i(s) - u_0^i(s))^2 ds}_{\rho^2_{L^2}(u_n^i, u_0^i) \to 0, \ n\to+\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ч. т. д.

т.е. $L^2_m(a,b)$ полно

Таблица сх-ей изм-х ф-ций в случае конечной меры X $\{\mu(X) < +\infty\}$ (на X):

{например $X = [a,b]$ — конечной}



$\{f_n(t)\} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2[a,b]} f(t)$: $\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\{f_n(t)\} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1[a,b]} f(t)$: $\int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\{f_n(t)\} \xrightarrow[\text{по мере}]{\text{сх.}} f(t)$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to+\infty} \mu\{t : |f_n(t) - f(t)| \geq \varepsilon\} = 0$

$\{f_n(t)\} \xrightarrow[n\to+\infty]{п.в.} f(t)$: это поточечная сх-ть, кроме мн-ва меры 0.

т.е. $\{f_n(t)\} \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t)$ только для $t \in M \subset [a,b]$, $\mu(M) = 0$.

т.к. выпуклый и замкнутый

+ 2. ~~Невырожденный~~ (лишнее) эллипсоид в гильбертовом пространстве:
$H = \{h \in \mathbb{H} \mid ||Ah - f||_{\mathbb{F}} \leqslant R\}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{F})$, $\exists A^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbb{F} \to \mathbb{H})$ (лишнее) $f \in \mathbb{F}$, $R > 0$.

см. доп. 10 + 3. $U = \{u \in L^2_n(a, b) \mid u(t) \in V \subset \mathbb{R}^n\}$, V — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$.

Примеры замкнутых, но не слабо замкнутых множеств: $R\cdot\{e_k\} \overset{сл.}{\to} \Theta_H \notin H$

+1. Сфера в бесконечномерном пространстве: $H = \{h \in \mathbb{H} \mid ||h||_{\mathbb{H}} = R\}$, $R > 0$.

Примеры компактных множеств:

Пример 2 других? см. оборот

+1 Гильбертов кирпич в l^2: $K = \{x \in \ell^2 \mid |x_k| \leqslant \frac{1}{k}\}$ (очевидно замкнут) → (пример 1) см. критерий комп. (оборот)

+2.

3. $U = \{u(\cdot) \in \mathbb{H} \mid ||u(t)||_{H^1(a,b)} \leqslant R\}$, $R > 0$, $\mathbb{H} = C[a, b]$, $L^2(a, b)$ или $L^1(a, b)$.

Примеры замкнутых, ограниченных, (и даже выпуклых) но не компактных множеств:

+1. Шар в бесконечномерном (евклидовом) пространстве: $S_R(0) = \{h \in \mathbb{H} \mid ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant R\}$, $R > 0$. $\{h_n\} = \{R e_n\}: ||h_m - h_n||_H = \sqrt{2}R$ не содержит фунд. п/посл.

см. лист 12 + 2. Параллелепипед в $L^2(a, b)$: $U = \{u(\cdot) \in L^2(a, b) \mid |u(t)| \leqslant 1$ для п.в. $t \in [a, b]\}$.

Примеры слабо компактных множеств:

+1 Невырожденный эллипсоид в гильбертовом пространстве: как вып., зам., огр.
$H = \{h \in \mathbb{H} \mid ||Ah - f||_{\mathbb{F}} \leqslant R\}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{F})$, $\exists A^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbb{F} \to \mathbb{H})$, $f \in \mathbb{F}$, $R > 0$.

+2. Шар в бесконечномерном (гильбертовом) пространстве: $H = \{h \in \mathbb{H} \mid ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant R\}$, $R > 0$. по Th из вып., замк., огр. ⇒ слаб. комп. (2.7.8)

см. доп. 10 + 3. $U = \{u \in L^2_n(a, b) \mid u(t) \in V \subset \mathbb{R}^n\}$, V — (вып., замк.,) ограниченное множество из $\mathbb{R}^n$.

Примеры не слабо компактных множеств: по Т.1 (стр. 183 К-Ф): $\forall \{x_n\} \overset{сл.}{\to} x$ в Н-норм. пр. $\exists K > 0: ||x_n|| \leqslant K$ в $\forall$ б.б. $\{x_n\} \in X$ $\forall \{x_{n_k}\}$ - б.б. ⇏ не явл. сл. сход.

+1. Любое неограниченное множество X (в евклидовом пр-ве)

+2. Сфера в бесконечномерном пространстве: $H = \{h \in \mathbb{H} \mid ||h||_{\mathbb{H}} = R\}$, $R > 0$. т.к. не явл. слабо замкн. $R\cdot\{e_k\} \overset{сл.}{\to} \Theta_H \notin H \Rightarrow \forall$ п/п $R\cdot\{e_{k_l}\} \overset{сл.}{\to} \Theta_H \notin H$

+3. Шаровой слой в бесконечномерном пространстве: $H = \{h \in \mathbb{H} \mid r \leqslant ||h||_{\mathbb{H}} \leqslant R\}$, $R > r > 0$. рассм. $r\{e_k\}$ —"—

7. Слабый вариант теоремы Вейерштрасса.

Теорема. *(слабый вариант теоремы Вейерштрасса)*

Пусть U — слабо компактное множество из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, функционал $J(u)$ определен и слабо полунепрерывен снизу на U. Тогда :

1. $J_* > -\infty$,

2. U_* непусто и слабо компактно,

3. Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ **слабо** *сходится к множеству U_* (т.е. множество U_* содержит все ее слабые предельные точки).*

Задачи:

Проверить, применим ли какой-либо из приведенных вариантов теоремы Вейерштрасса, а также найти J_* и U_* в задачах:

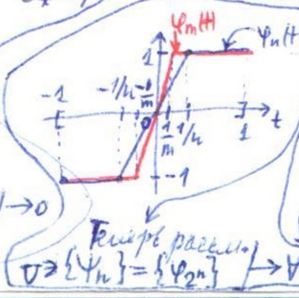
$U \ni$ $\begin{cases} ||u_0|| \leqslant ||u_k|| + ||u_0 - u_k|| \\ ||u_k|| \leqslant ||u_0|| + ||u_k - u_0|| \end{cases}$ $\Big| ||u_0|| - ||u_k|| \Big| \leqslant ||u_k - u_0|| \to 0$ $\exists \lim_{k\to\infty} ||u_k|| = ||u_0|| \leqslant 1$, $u_0 \in U$

+1. $J(u) = u^2 \to \inf\limits_{u \in U}$, $U = (0, 1]$ (незамкн.) или $U = (-1, 1)$ (некомп.); в R^1 неприменим $J_* = 0$
$U_* = \varnothing$, $U_* = \{0\}$

+2. $J(u) = \int\limits_{-1}^{0} u(t)\,dt - \int\limits_{0}^{1} u(t)\,dt \to \inf\limits_{u \in U}$, $U = \{u \in C[-1, 1] \mid ||u||_{C[-1,1]} \leqslant 1\}$ — замкн. и огр., но некомп. (шар; неевклидово → неприменим слабый вар. Th; метрическая Th неприм.)

$J_* = -2$ $U_* = \varnothing$ см. след. лист

$J(u)$ - непр.: пусть $||u_k - u_0|| = \max\limits_{[-1;1]} |u_k - u_0| \to 0$
Тогда $|J(u_k) - J(u_0)| = \left|\int_{-1}^{0}(u_k - u_0) + \int_{0}^{1}(u_0 - u_k)\right| \leqslant$
$\leqslant \left|\int_{-1}^{0}\right| + \left|\int_{0}^{1}\right| \leqslant \underbrace{\int_{-1}^{0}|u_k - u_0|}_{\leqslant ||u_k - u_0||} + \underbrace{\int_{0}^{1}|u_k - u_0|}_{\leqslant ||u_k - u_0||} \leqslant 2||u_k - u_0|| \to 0$



Рассм. $\{\varphi_n(t)\} \in U$
$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1, & [-1, -\frac{1}{n}] \\ nt, & [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, & [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$
$\rho(\varphi_m, \varphi_n) = \max\limits_{[-1,1]} |\varphi_m - \varphi_n| \overset{m>n}{=} 1 - \frac{n}{m}$

$\rho(\psi_{k_n}, \psi_{k_m}) = \rho(\varphi_{2^{k_n}}, \varphi_{2^{k_m}}) \overset{m>n,\ k_m>k_n}{=} 1 - \underbrace{\frac{2^{k_n}}{2^{k_m}}}_{\leqslant \frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{2} \not\to 0$ нефунд.
т.е. $\forall$ п/п $\{\psi_{k_n}\}$ расх.

Кирп. рассм. $U \ni \{\psi_n\} = \{\varphi_{2^n}\} \to \forall$ п/п $\{\psi_{k_n}\}$

Критерий компактности в l_2 замкнутого множества: замкн. множ. $K \subset l_2$ явл. компактом $\overset{\text{т.и т.т.}}{\Longleftrightarrow}$ **-11.1-**

① K равном. огр-но

② $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\ \forall N \geq N(\varepsilon)\ \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} x_n^2 < \varepsilon$ сразу для $\forall x \in K$

Пример 1: $\Gamma = \{x \in l_2 : |x_k| \leq \frac{1}{k}\}$

{ либо $\Gamma = \{x \in l_2 : |x_k| \leq \frac{1}{2^{k-1}}\}$ }

② $\forall \varepsilon>0\quad \forall x \in \Gamma\quad \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} x_n^2 \leq \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = S(N) < \varepsilon$ при $N \geq N_1(\varepsilon)$
(хвост сх-ся ряда)

{ либо соотв-но $-\|- \leq \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{4^N} + \frac{1}{4^{N+1}} + \ldots =$

$= \frac{1}{4^N} \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{N-1}} < \varepsilon$

$1 + \log_4 \frac{1}{3\varepsilon} < N \Leftrightarrow \frac{1}{3\varepsilon} < 4^{N-1}$

т.е. можно $N(\varepsilon) = [\log_4 \frac{1}{3\varepsilon}] + 2$ }

① $\forall x \in \Gamma\ \|x\|^2_{l_2} \leq \sum \frac{1}{k^2}$ - сх-ся

Γ - замкнуто: пусть $\{x^{(p)}\} \xrightarrow[l_2]{\text{сх}} x$, где $x^{(p)} \in \Gamma$

т.е. $\|x^{(p)} - x\|^2_{l_2} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (x_k^{(p)} - x_k)^2 \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow x \in l_2$ в силу полноты l_2, при этом

$|x_k| = |x_k^{(p)} + (x_k - x_k^{(p)})| \leq \underbrace{|x_k^{(p)}|}_{\leq 1/k} + \underbrace{|x_k - x_k^{(p)}|}_{\searrow 0\ p\to\infty} \Rightarrow |x_k| \leq \frac{1}{k}$ ч.т.д.

Критерий комп-ти замкн. мн-ва в $L_2[a,b]$: замкн. множ. $K \subset L_2[a,b]$ комп. $\overset{}{\underset{\text{т.и т.т.}}{\Longleftrightarrow}}$

① K - равном. огр.

② $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0:\ \forall |\Delta| \leq \delta(\varepsilon)$

$\int_a^b (f(t+\Delta) - f(t))^2\, dt < \varepsilon$ сразу для $\forall f \in K$

{ счит. $f(t+\Delta) \equiv f(a)$, $t+\Delta<a$; $f(t+\Delta) \equiv f(b)$, $t+\Delta>b$ }

Пример 2:

для $K = \{ f \in C[a,b] : |f(t)| \leq M,\ |f(t) - f(t_1)| \leq \underset{>0}{L} |t - t_1|\ \ \forall t, t_1 \in [a,b] \}$

② $\forall \varepsilon>0\quad \int_a^b (f(t+\Delta) - f(t))^2\, dt \leq L^2 \int_a^b \Delta^2\, dt = (b-a) L^2 \Delta^2 < \varepsilon \Leftrightarrow \Delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}} \cdot \frac{1}{L}$, т.е. можно $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}} \cdot \frac{1}{2L}$

① $\forall f \in K\ \|f\|_{C[a,b]} \leq M\quad \|f\|^2_{L_2[a,b]} = \int_a^b f^2(t)\, dt \leq M^2(b-a)$

K - замкнуто в $L^2[a,b]$: 1) пусть $\{\overset{K}{\overset{\cup}{f_k}}\} \xrightarrow[L_2(a,b)]{\text{сх.}} f \in K$ ч.т.д.

2) $\forall \{f_k\} \in K$ $\exists \{f_{k_l}\} \rightrightarrows f \in K \Rightarrow \{f_{k_l}\} \xrightarrow[L^2]{} f \in K$

{ K - компакт в $C[a,b]$ } ③ K - компакт в $C[a,b]$ ↳ для $\forall \{f_k\} \in K\ \exists \{f_{k_l}\} \rightrightarrows f \in K \Rightarrow \{f_{k_l}\} \xrightarrow[L^2]{} f \Rightarrow \{f_{k_l}\} \xrightarrow[L^1]{} f$, т.е. K-компакт и в L^2, и в L^1!

Хотя более просто так: ① $K \subset C[a,b] \subset L^2[a,b] \subset L^1[a,b]$ ② (сх-ть в $C[a,b]$ {т.е. $\rightrightarrows$}) → (сх-ть в $L^2[a,b]$) → (сх-ть в $L^1[a,b]$)

① для одной ф-ции $f(x)$ из Липш. на $[a,b]$ ⇒ огр. на $[a,b]$ (либо т.к. из Липш. огр.⇐ след. равном. непр. ⇒ непр.!)

фикс. $\forall c \in [a,b]$ $|f(x) - f(c)| \leq L \underbrace{|x - c|}_{\leq b-a}$

② из равном. Липш. ⇒ равностеп. непр.

$|f_k(t+\Delta t) - f_k(t)| \leq L \underbrace{|\Delta t|}_{<\delta(\varepsilon) = \varepsilon/L}$ $\forall k; \forall t, t+\Delta t \in [a,b]$

④ **Т. Арцела:** если $K = \{f_k(t)\}$ - равностеп. непр. на $[a,b]$

⇔ K-предкомпактно в $C[a,b]$ $|f_k(t)| \overset{\{\leq M\}}{\leq} M>0$ - равном. огр. на $[a,b]$

$\Rightarrow \exists \{f_{k_l}\} \xrightarrow[l\to\infty]{} f(t)$ - непр. Если дополн-но K-замкн. в $C[a,b]$, то $f \in K$ и K-компакт.
$(\forall \{f_k\} \in K)$

Док-во (замкнутости) компактности мн-ва K ① в $C[a,b]$:
{ K-предкомп. по Т.А. }

③ равном. Липш. ⇏ равном. огр. { напр., мн-во констант }

•) Берем $\forall \underset{\subset C[a,b]}{f_k \in K} \Rightarrow \exists \{f_{k_l}\} \underset{l\to\infty}{\rightrightarrows} f$ - непр., т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\ \forall l>N(\varepsilon)\ |f(t) - f_{k_l}(t)| < \varepsilon$ сразу для $\forall t \in [a,b]$ (I)

т.е. $\|f_{k_l} - f\|_{C[a,b]} \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$

••) Теперь фикс. $\forall t, t+\Delta t \in [a,b]$:

$|f(t+\Delta t) - f(t)| = |f(t+\Delta t) - f_{k_l}(t+\Delta t) + f_{k_l}(t+\Delta t) - f_{k_l}(t) + f_{k_l}(t) - f(t)| \leq$

$\leq \underbrace{|f(t+\Delta t) - f_{k_l}(t+\Delta t)|}_{\searrow 0} + \underbrace{|f_{k_l}(t+\Delta t) - f_{k_l}(t)|}_{\leq L|\Delta t|} + \underbrace{|f_{k_l}(t) - f(t)|}_{\searrow 0}$

устремляем $l \to +\infty$ (II) т.е. $|f(t+\Delta t) - f(t)| \leq L |\Delta t|$

•••) $\max\limits_{[a,b]} |f_{k_l}(t) - f(t)| \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$

для $\forall$ фикс. $t \in [a,b]$:

$||f_{k_l}(t)| - |f(t)|| \leq |f_{k_l}(t) - f(t)| \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{l\to+\infty} \underbrace{|f_{k_l}(t)|}_{\leq M} = |f(t)| \leq M$ (III)

Итого: $\exists \{f_{k_l}\} \xrightarrow[\text{сх-ся}]{C[a,b]} f \in K$ (из I, II, III) ⇒ K-компакт в $C[a,b]$

Утв-е: $J_1(u), J_2(u)$ — {слаб.} н/непр. снизу $\Rightarrow \underset{\geqslant 0}{\alpha} J_1(u) + \underset{\geqslant 0}{\beta} J_2(u)$ {слаб.} н/непр. снизу

для $\{u_k\} \xrightarrow{\{сл\}} u_0$

$\varliminf_{k\to\infty}(\alpha J_1(u_k)+\beta J_2(u_k)) \geqslant \alpha \varliminf_{k\to\infty} J_1(u_k) + \beta \varliminf_{k\to\infty} J_2(u_k) \geqslant \alpha J_1(u_0)+\beta J_2(u_0)$

ТЕМА 1. ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА.

сильная нет

слабая

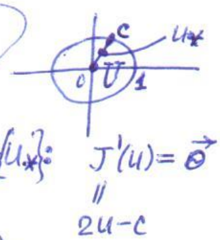
Th применима

полож. опр.

$\underbrace{\langle Iu,u\rangle_{L^2}}_{вып. \to сл. н/непр.} + \underbrace{\langle -c,u\rangle_{L^2}}_{слаб. непр.}$

шар → сл. комп., но не комп.

+3. $J(u) = \int\limits_{-1}^{1} u^2(t) - c(t)u(t)\,dt \to \inf\limits_{u\in U}$, $U = \{u \in L^2[-1,1] \mid ||u||_{L^2[-1,1]} \leqslant 1\}$, $||c||_{L^2[-1,1]} = 1$.



$U_* = \{u_*\}$: $J'(u) = \vec{\theta}$, $J'(u) = 2u - c$, $u_* = \frac{c}{2} \in \operatorname{int} U$

$J_* = J(\frac{c}{2}) = \langle \frac{c}{2}, \frac{c}{2}\rangle - \langle c, \frac{c}{2}\rangle = -\frac{1}{4}$

1 способ (забегаем вперед)

2 способ

$J(u) = \langle u,u\rangle - \langle c,u\rangle = \langle (u-\frac{c}{2})+\frac{c}{2}, (u-\frac{c}{2})+\frac{c}{2}\rangle - \langle c,u\rangle =$

$= \langle u-\frac{c}{2}, u-\frac{c}{2}\rangle + 2\langle \frac{c}{2}, u-\frac{c}{2}\rangle - \langle c,u\rangle =$

$= \underbrace{\|u-\frac{c}{2}\|^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\langle c, -\frac{c}{2}\rangle}_{-1/2} + \underbrace{\langle \frac{c}{2}, \frac{c}{2}\rangle}_{1/4} \geqslant -\frac{1}{4} = J(\frac{c}{2})$

д.з. **+4.** $J(x) = ||x||^2_{\ell^2} \to \inf\limits_{x\in X}$, $X = \{x \in \ell^2 \mid \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 x_n^2 \geqslant 1\}$.

неограничено → не явл. комп., не явл. сл. комп. → неприм. обе Th

$\bar{x}_k = (k, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in X$, либо {см. стр. 8 второй части задач}

$J(x) \geqslant 0$

для $\bar{x} = (0, \ldots, \underset{n\text{-я коор.}}{\frac{1}{n}}, \ldots 0 \ldots) \in X$, т.к. $\sum_n n^2 \bar{x}_n^2 = n^2 \frac{1}{n^2} = 1$

$J(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +0$ → $J_* = 0$

$J(x) = 0 \Leftrightarrow x = \vec{\theta} \notin X \mapsto U_* = \varnothing$

к№2 продолжение

$J(u) = \int_{-1}^{0} \underset{\substack{\leqslant 1\\ \geqslant -1}}{u(t)}\,dt - \int_{0}^{1} \underset{\substack{\leqslant 1\\ \geqslant -1}}{u(t)}\,dt \geqslant \int_{-1}^{0}(-1)\,dt - \int_0^1 1\,dt = -2$ → $\boxed{J_* = -2}$

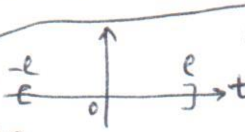
$\forall u \in U$

$\underset{\cap\, U}{J(\varphi_n(t))} = \underbrace{\int_{-1}^{-1/n}(-1)\,dt}_{-(1-1/n)} + \underbrace{\int_{-1/n}^{0} nt\,dt}_{-\frac{1}{2n}} - \underbrace{\int_0^{1/n} nt\,dt}_{-\frac{1}{2n}} - \underbrace{\int_{1/n}^1 1\,dt}_{-(1-1/n)} = -2 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2+0$

с др. стор. $\forall u \in U$ $J(u) > -2$ в силу непр-ти → $\boxed{U_* = \varnothing}$

№2 | стр. 11

$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(s)\,ds$, $a_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(s)\cos\frac{\pi n}{\ell}s\,ds$, $b_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(s)\sin\frac{\pi n}{\ell}s\,ds$



$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\{a_k \cos\frac{\pi n}{\ell}t + b_k \sin\frac{\pi n}{\ell}t\}$

$\{e_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \frac{\sin\frac{\pi n}{\ell}t}{\sqrt{\ell}}, \frac{\cos\frac{\pi n}{\ell}t}{\sqrt{\ell}}\right\}$ о/н базис в $L^2(-\ell,\ell)$

$U = \{u \in L^2(-\ell,\ell) : |u(t)| \overset{п.в.}{\leqslant} 1\}$

$\{\underset{u_n}{\sqrt{\ell}\cdot e_n}\} \in U$, т.к. $|\sqrt{\ell}\cdot e_n(t)| \leqslant 1$

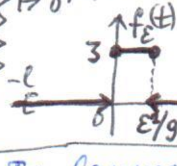
$\|u_n - u_m\|_{L^2(-\ell;\ell)} = \sqrt{2\ell}$

u_n не содерж. фунд. п/посл.

{для $L^2[a;b]$ о/н базис $\left\{\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{2\pi n}{b-a}\left(t+\frac{a+b}{2}\right), \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{2\pi n}{b-a}\left(t+\frac{a+b}{2}\right)\right\}$

$t \in \left[-\frac{b-a}{2}; \frac{b-a}{2}\right]$}

При этом для $\forall u \in U$ $\forall \varepsilon > 0$ $u + f_\varepsilon \notin U$, $\Rightarrow$ значит $S_\varepsilon(u) \not\subset U \mapsto$ $\operatorname{int} U = \varnothing$, $\partial U = U$



$\|f_\varepsilon\|_{L^2(-\ell,\ell)} = \left(\int_0^{\varepsilon^2/9} 9\,dt\right)^{1/2} = \varepsilon$

т.е. данное мн-во не содержит внутренних точек

Можно обобщить: $\forall$ компактное мн-во ($\dim H = \infty$) состоит только из граничных точек (док-во аналогичное, от противного: пусть $\exists\, u_0 \in \operatorname{int} U$, тогда рассмотрим $\{u_n\} = \{u_0 + \varepsilon e_n\}$).